EPFL

2

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Echéance : vendredi 15 novembre 2024
Durée : 90 minutes

Tube en rotation

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

SECTION : **Mathématiques**

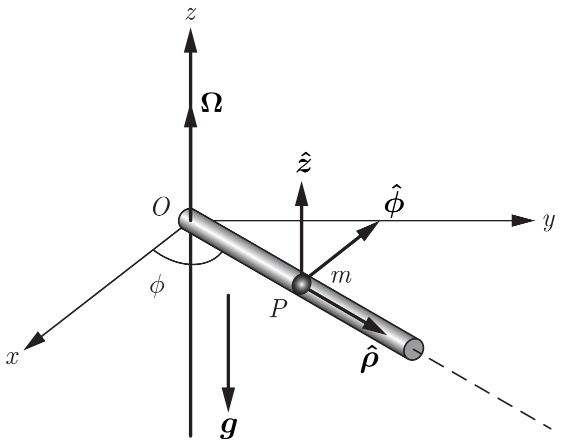
SALLE :

L'exercice à rendre comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques sont à effectuer sur les pages quadrillées.

Consignes

- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Les **réponses** sont à retranscrire sur les pointillés sous chaque question dans l'espace réservé à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas corrigées**.

2. Tube en rotation



On considère une centrifugeuse constituée d'un tube tournant dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ autour de son extrémité située à l'origine O dans le plan horizontal Oxy. Une bille de masse m, considérée comme un point matériel P, est astreinte à glisser le long du tube.

Pour décrire la dynamique du point matériel, on choisit un repère cylindrique $\left(P, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}\right)$ où le vecteur unitaire radial $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ est orienté le long de l'axe du tube vers l'extérieur, le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ est orienté dans le sens trigonométrique et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ est orienté vers le haut. Le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire,

$$\boldsymbol{F}_f = -\,\frac{m}{\tau}\,\boldsymbol{v}_\rho$$

où τ est le temps caractéristique de l'amortissement et $\boldsymbol{v}_\rho$ est la vitesse radiale du point matériel qui est orientée selon le vecteur $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cylindriques ρ et z et de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. Déterminer la norme et l'orientation du vecteur accélération de la bille.

   Les contraintes géométriques sur la vitesse angulaire azimutale $\dot{\phi}$, la coordonnée verticale z et leurs dérivées temporelles sont les suivantes,

   $$\begin{aligned} &\dot{\phi} = \Omega = \text{cste} \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{\phi} = 0 \\ &z = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{z} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Compte tenu des contraintes géométriques (1), l'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit,

   $$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\Omega^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2\,\dot{\rho}\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{2}$$

2. Déterminer les forces extérieures exercées sur la bille.

   Les forces extérieures exercées sur le point matériel sont son poids $\boldsymbol{P}$, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ et la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f$. Compte tenu de la vitesse radiale,

   $$\boldsymbol{v}_\rho = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{3}$$

   ces forces s'expriment en coordonnées cylindriques comme,

   $$\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{N} = N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + N_z\,\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\boldsymbol{F}_f = -\,\frac{m}{\tau}\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \tag{4}$$

3. Déterminer la norme et l'orientation de la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le tube sur la bille en fonction de son mouvement.

   La loi vectorielle du mouvement de la bille s'écrit,

   $$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_f = m\,\boldsymbol{a} \tag{5}$$

   Compte tenu de l'accélération (2) et des forces extérieures (4), la projection de la loi du mouvement (5) le long des lignes de coordonnées cylindriques donne lieu à trois équations scalaires,

   $$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}: \quad -\,\frac{m}{\tau}\,\dot{\rho} = m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\Omega^2\right) \tag{6}$$

   $$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}: \quad N_\phi = 2\,m\,\Omega\,\dot{\rho} \tag{7}$$

   $$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{z}}: \quad -\,mg + N_z = 0 \tag{8}$$

   Compte tenu des équations (7) et (8), la force de réaction normale (4) s'écrit explicitement comme,

   $$\boldsymbol{N} = 2\,m\,\Omega\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9}$$

4. Dans la limite où la rotation est négligeable par rapport au frottement,

   $$m\,\rho\,\Omega^2 \ll \frac{m}{\tau}\,\dot{\rho}$$

   déterminer l'équation horaire de la coordonnée $\rho\,(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $\rho\,(0) = 0$ et $\dot{\rho}\,(0) = v_0$. En déduire l'évolution temporelle du vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}_O\,(t)$ évalué à l'origine O.

   Dans la limite où la rotation est négligeable, l'équation du mouvement radial (6) se réduit à,

   $$\ddot{\rho} = -\,\frac{1}{\tau}\,\dot{\rho} \qquad \text{où} \qquad \ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \tag{10}$$

   qui peut être mise sous la forme suivante,

   $$\frac{d\dot{\rho}\,(t)}{\dot{\rho}\,(t)} = -\,\frac{dt}{\tau} \tag{11}$$

L'intégration de l'équation différentielle (11) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_{v_0}^{\dot{\rho}(t)} \frac{d\dot{\rho}'(t')}{\dot{\rho}'(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \tag{12}$$

La solution de l'équation intégrale (12) est,

$$\ln\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{v_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \tag{13}$$

d'où l'on tire l'évolution temporelle de la coordonnée de vitesse radiale,

$$\dot{\rho}(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{14}$$

L'intégration de la coordonnée de vitesse radiale (14) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_0^{\rho(t)} d\rho'(t') = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' \tag{15}$$

La solution de l'équation intégrale (15) est,

$$\rho(t) = v_0\,\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \tag{16}$$

Le vecteur moment cinétique de la bille évalué à l'origine s'écrit en coordonnées cylindriques,

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\left(\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) \times \left(\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = m\,\rho^2\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{17}$$

En substituant l'évolution temporelle (16) de la coordonnée radiale dans l'expression (17) du moment cinétique en coordonnées cylindriques, on en déduit son évolution temporelle,

$$\boldsymbol{L}_O(t) = m\,v_0^2\,\tau^2\,\Omega\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)^2 \hat{\boldsymbol{z}} \tag{18}$$

5. Dans la limite où le frottement est négligeable par rapport à la rotation,

$$\frac{m}{\tau}\,\dot{\rho} \ll m\,\rho\,\Omega^2$$

déterminer l'équation horaire de la coordonnée $\rho(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $\rho(0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(0) = 0$. En déduire l'évolution temporelle du vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}_O(t)$ évalué à l'origine O.

Dans la limite où le frottement est négligeable, l'équation du mouvement radial (6) se réduit à,

$$\ddot{\rho}(t) = \Omega^2\,\rho(t) \tag{19}$$

L'équation différentielle (19) du deuxième ordre est équivalente aux équations différentielles du premier ordre,

$$\dot{\rho}(t) = \pm\,\Omega\,\rho(t) \tag{20}$$

On le montre par itération en dérivant l'équation différentielle (20) par rapport au temps,

$$\ddot{\rho}(t) = \pm\,\Omega\,\dot{\rho}(t) = \Omega^2\,\rho(t) \tag{21}$$

L'équation différentielle (20) peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{d\rho(t)}{\rho(t)} = \pm\,\Omega\,dt \tag{22}$$

L'intégration de l'équation différentielle (22) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho'\left(t'\right)}{\rho'\left(t'\right)} = \pm\,\Omega \int_0^t dt' \tag{23}$$

La solution de l'équation intégrale (23) est,

$$\ln\left(\frac{\rho\left(t\right)}{\rho_0}\right) = \pm\,\Omega\, t \tag{24}$$

d'où l'on tire deux solutions particulières pour l'évolution temporelle de la coordonnée radiale,

$$\rho_1\left(t\right) = \rho_0 \exp\left(\Omega\, t\right) \qquad \text{et} \qquad \rho_2\left(t\right) = \rho_0 \exp\left(-\,\Omega\, t\right) \tag{25}$$

La solution générale est une combinaison linéaire des solutions particulières,

$$\rho\left(t\right) = A\,\rho_1\left(t\right) + B\,\rho_2\left(t\right) = A\,\rho_0 \exp\left(\Omega\, t\right) + B\,\rho_0 \exp\left(-\,\Omega\, t\right) \tag{26}$$

La dérivée temporelle de la solution (26) s'écrit,

$$\dot{\rho}\left(t\right) = A\,\rho_0\,\Omega \exp\left(\Omega\, t\right) -\, B\,\rho_0\,\Omega \exp\left(-\,\Omega\, t\right) \tag{27}$$

La condition initiale sur la coordonnée radiale (26) est,

$$\rho\left(0\right) = \left(A + B\right)\rho_0 = \rho_0 \tag{28}$$

et la condition initiale sur la vitesse radiale (27) est,

$$\dot{\rho}\left(0\right) = \left(A -\, B\right)\rho_0\,\Omega = 0 \tag{29}$$

Les conditions initiales (29) et (29) se réduisent au système,

$$A + B = 1 \qquad \text{et} \qquad A -\, B = 0 \tag{30}$$

dont la solution est,

$$A = B = \frac{1}{2} \tag{31}$$

Compte tenu des coefficients (31), la coordonnée radiale (26) devient,

$$\rho\left(t\right) = \frac{1}{2}\,\rho_0\Big(\exp\left(\Omega\, t\right) + \exp\left(-\,\Omega\, t\right)\Big) = \rho_0 \cosh\left(\Omega\, t\right) \tag{32}$$

Pour un temps suffisamment grand, i.e. $\Omega\, t \gg 1$, en première approximation $\exp\left(-\,\Omega\, t\right) \ll \exp\left(\Omega\, t\right)$. Ainsi, la coordonnée radiale se réduit à,

$$\rho\left(t\right) \simeq \frac{1}{2}\,\rho_0\, \exp\left(\Omega\, t\right) \tag{33}$$

En substituant l'évolution temporelle (32) de la coordonnée radiale dans l'expression (17) du moment cinétique en coordonnées cylindriques, on en déduit son évolution temporelle,

$$\boldsymbol{L}_O\left(t\right) = \frac{1}{4}\, m\,\rho_0^2\,\Omega\,\Big(\exp\left(\Omega\, t\right) + \exp\left(-\,\Omega\, t\right)\Big)^2\, \hat{\boldsymbol{z}} = m\,\rho_0^2\,\Omega\, \cosh^2\left(\Omega\, t\right)\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{34}$$

Pour un temps suffisamment grand, i.e. $\Omega\, t \gg 1$, en première approximation $\exp\left(-\,\Omega\, t\right) \ll \exp\left(\Omega\, t\right)$. Ainsi, le moment cinétique se réduit à,

$$\boldsymbol{L}_O\left(t\right) \simeq \frac{1}{4}\, m\,\rho_0^2\,\Omega\, \exp\left(2\Omega\, t\right)\, \hat{\boldsymbol{z}} \tag{35}$$